

# ΟΠΤΙΚΗ FOURIER

Γ. Μήτσου

## A. Θεωρία

### 1. Εισαγωγή

Η επεξεργασία οπτικών δεδομένων, το φιλτράρισμα χωρικών συχνοτήτων (και επομένως η επεξεργασία ενός οπτικού σήματος ή μιας εικόνας) και η ολογραφία, βρίσκονται ανάμεσα σ'ένα μεγάλο πλήθος οπτικών εφαρμογών που συνδέονται άμεσα με ένα βασικό τμήμα της μοντέρνας οπτικής: την οπτική Fourier. Η οπτική Fourier περιγράφει τη διάδοση του φωτός κατά μήκος οπτικών συστημάτων. Σύμφωνα με τη θεωρία Fourier, κάθε σήμα ή οπτική απεικόνιση (εικόνα) αποτελείται από ένα άθροισμα άπειρων ημιτονοειδών κυμάτων (συναρτήσεων), τα οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά μεταβολές της φωτεινότητας σ'όλη την έκταση της εικόνας. Βασικά στοιχεία ενός τέτοιου κύματος είναι η χωρική συχνότητα, το πλάτος και η φάση. Η χωρική συχνότητα είναι η συχνότητα του κύματος κατά τη διάδοσή του στο χώρο. Το πλάτος αντιστοιχεί στην αντίθεση ή διαφορά μεταξύ των ακραίων τιμών σκοτεινού – φωτεινού της εικόνας, ενώ η φάση περιγράφει τη μετατόπιση της θέσης του κύματος, σε σχέση με την αρχική. Η λειτουργία επομένως ενός οπτικού συστήματος απεικόνισης συνίσταται στην κωδικοποίηση των παραπάνω παραμέτρων και τη μεταφορά τους (μέσω του οπτικού κύματος που διαμορφώνουν) σ' ένα επίπεδο απεικόνισης (επίπεδο Fourier ή επίπεδο συχνοτήτων). Το παραπάνω πραγματοποιείται με τη βοήθεια μετασχηματισμών Fourier.

Ένας μετασχηματισμός Fourier, δεν κωδικοποιεί μόνο ένα απλό ημιτονοειδές, αλλά ένα πλήθος ημιτονοειδών που διαμορφώνουν την εικόνα και επομένως ένα πλήθος χωρικών συχνοτήτων σε μια μεγάλη περιοχή που καλύπτει από χαμηλές έως πολύ υψηλές συχνότητες τις οποίες και μεταφέρει στο επίπεδο απεικόνισης. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό σκεφτείτε την περίπτωση ενός πρίσματος, όπου μια ακτίνα φωτός διασπάται σε ένα φάσμα χρωμάτων. Κατά την ίδια έννοια και ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει μια συνάρτηση  $f(x)$  σε ένα φάσμα συχνοτήτων. Δεδομένου ότι η προσέγγιση Fourier πραγματοποιείται τη διαδικασία οπτικής απεικόνισης ως φαινόμενο περίθλασης, πολλές πρακτικές εφαρμογές της περίθλασης και όχι μόνο στην οπτική, χρησιμοποιούν ως εργαλείο τους μετασχηματισμούς Fourier.

### 2. Οπτική Fourier

Σύμφωνα με τη θεωρία Fourier, σχεδόν όλες οι περιοδικές συναρτήσεις μπορεί να συντεθούν από ένα άθροισμα αρμονικών όρων (δηλαδή από ημιτονικές ή συνημιτονικές συνιστώσες) που παρουσιάζουν διαφορετικά πλάτη και συχνότητες. Οπωσδήποτε όμως η ανάλυση δεν περιορίζεται μόνο στις περιοδικές συναρτήσεις σε σχέση με τις αρμονικές τους, αλλά επεκτείνεται και στις μη περιοδικές (για παράδειγμα θόρυβος), οι οποίες μπορούν να αναλυθούν στις συνιστώσες συχνότητές τους. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης διαμορφώνει επομένως ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων (ένα σήμα δηλαδή), όπου η σπουδαιότητα της κάθε συχνότητας καθορίζεται από το αντίστοιχο πλάτος της. Υψούμενος δε στο τετράγωνο απεικονίζει την κατανομή της έντασης. Έτσι ένας μετασχηματισμός Fourier θα μας δώσει την κατανομή της έντασης κατά την απεικόνιση της περίθλασης ενός αντικειμένου, δεδομένου ότι η απεικόνιση περίθλασης διαιρεί ένα οπτικό σήμα σε μια σειρά από χωρικές συχνότητες, των οποίων η σπουδαιότητα καθορίζεται από την κατανομή της έντασης.

## 2.1 Συμβολή κυμάτων

Η συμβολή κυμάτων είναι το φαινόμενο που παρατηρείται όταν δυο ή περισσότερα κύματα που διαδίδονται στο ίδιο μέσο, αλληλεπιδρούν (συμβάλλουν) μεταξύ τους. Η συμβολή τους μπορεί να είναι είτε ενισχυτική είτε αποσβεστική, δηλαδή το νέο κύμα που θα προκύψει να είναι μεγαλύτερο από τα αρχικά κύματα ή πολύ μικρότερο ή και μηδενικό.

Φαινόμενα συμβολής συναντώνται σε όλα τα κύματα: ακουστικά, μηχανικά, ηλεκτρομαγνητικά κ.λπ. Το πιο εντυπωσιακό όμως φαινόμενο συμβολής παρατηρείται στην περίπτωση συμβολής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ορατού φωτός. Σ' αυτή την περίπτωση το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο του κύματος που προκύπτει είναι το ανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών πεδίων των επί μέρους κυμάτων που συμβάλλουν, ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους, τη διεύθυνσή τους ή την αρχή τους. Επειδή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ταλαντώνονται σε σχέση με το χρόνο, βασικός παράγοντας εδώ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ τους. Φαινόμενα συμβολής είναι γενικώς ορατά όταν τα κύματα που συμβάλλουν έχουν την ίδια συχνότητα (ή μήκος κύματος), έτσι ώστε η διαφορά φάσης τους είναι σταθερή σε σχέση με το χρόνο. Αυτό επιτυγχάνεται όταν τα κύματα προέρχονται από την ίδια πηγή (διαίρεση μετώπου κύματος).

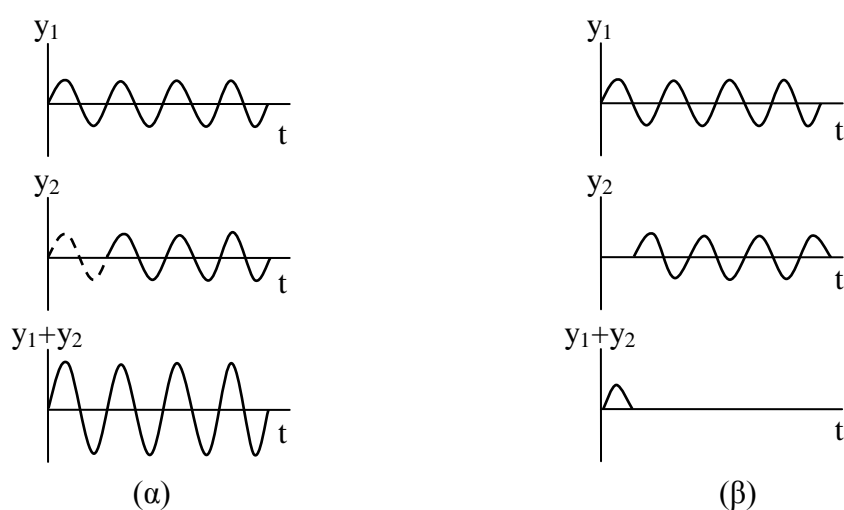
Η διαφορά φάσης  $\Delta\phi$  μεταξύ δυο κυμάτων διαμορφώνεται από τη σχέση:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} \quad (1)$$

και εξαρτάται από τη διαφορά οπτικών δρόμων  $\Delta r$  των κυμάτων μήκους κύματος  $\lambda$ .

Όταν το  $\Delta\phi$  είναι πολλαπλάσιο του  $2\pi$  ή όταν  $\Delta r$  είναι πολλαπλάσιο του  $\lambda$ , τότε τα ηλεκτρικά πεδία των δυο κυμάτων αθροίζονται και δημιουργούν ένα μεγαλύτερο ηλεκτρικό πεδίο (ενισχυτική συμβολή - Σχήμα 1α).

Όταν το  $\Delta\phi$  είναι περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi$  ή όταν  $\Delta r$  είναι περιττό πολλαπλάσιο



**Σχήμα 1.** (α) Το αποτέλεσμα της συμβολής δυο όμοιων κυμάτων που παρουσιάζουν την ίδια φάση ή διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ . (β) Το αποτέλεσμα της συμβολής δυο όμοιων κυμάτων που παρουσιάζουν διαφορά φάσης περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi$ .

του  $\lambda/2$ , τότε τα ηλεκτρικά πεδία των δυο κυμάτων έχουν αντίθετη διεύθυνση και το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που διαμορφώνεται είναι μικρότερο. Στην περίπτωση ειδικά που τα κύματα έχουν το ίδιο πλάτος, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό (αποσβεστική συμβολή - Σχήμα 1β).

Σημείωση: όλες οι ενδιάμεσες καταστάσεις θα μας δώσουν ενδιάμεσα φαινόμενα ενισχυτικής ή αποσβεστικής συμβολής.

## 2.2 Περίθλαση φωτός

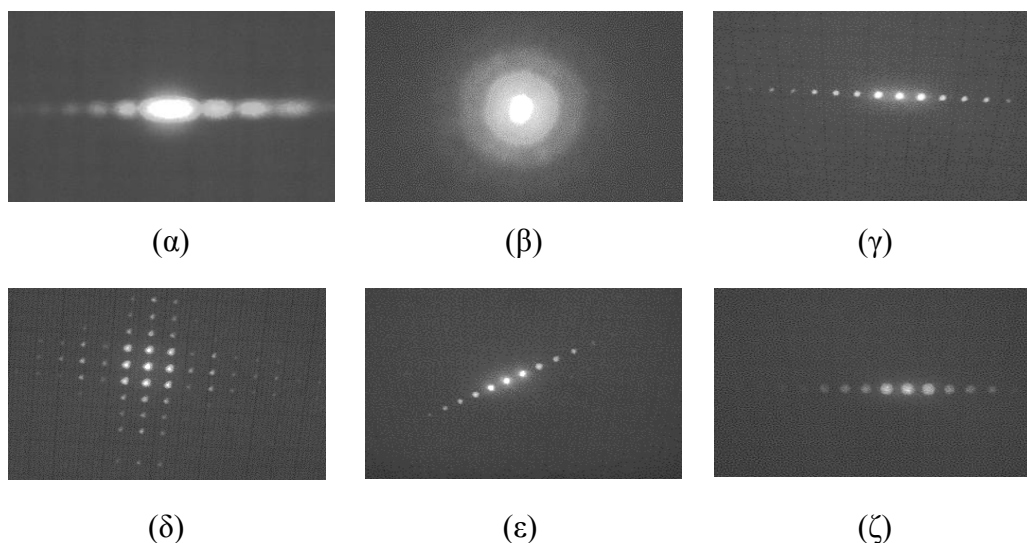
Μια βασική ιδιότητα των κυμάτων είναι ότι παρουσιάζουν φαινόμενα περίθλασης. Για παράδειγμα τα ακουστικά κύματα μπορούν να καμπυλώσουν (να αποκλίνουν) γύρω από γωνίες κ.λπ. Κατά παρόμοιο τρόπο και μια δέσμη φωτός, όταν συναντά εμπόδιο, μπορεί να αποκλίνει από την πορεία της, να καμπυλώσει γύρω από αυτό και ένα τμήμα της να βρεθεί στην περιοχή της γεωμετρικής σκιάς του. Στην περίπτωση που περνάει μέσα από ένα πολύ μικρό άνοιγμα με αιχμηρές πλευρές, ένα τμήμα της θα βρεθεί έξω από το όριο της γεωμετρικής σκιάς του ανοίγματος. Σε μια πιο προσεκτική παρατήρηση, μπορούμε να δούμε ότι στην περιοχή αυτή σχηματίζονται σκοτεινές και φωτεινές ζώνες (απεικόνιση περίθλασης), φαινόμενο το οποίο δεν μπορεί να εξηγηθεί από τη γεωμετρική οπτική. Επομένως η περίθλαση είναι ένα καθαρά κυματικό φαινόμενο και παρατηρείται όταν κατά τη διάδοση ενός κύματος, ένα τμήμα του μεταβάλλει το πλάτος ή τη φάση του.

Είναι βασικό να κατανοήσουμε ότι δεν υπάρχει θεμελιακή διαφορά μεταξύ των φαινομένων της συμβολής και της περίθλασης των κυμάτων. Θεωρούμε όμως ως συμβολή το φαινόμενο που παρατηρείται όταν έχουμε υπέρθεση λίγων κυμάτων και ως περίθλαση την περίπτωση υπέρθεσης μεγάλου αριθμού κυμάτων που ξεκινούν από ένα εμπόδιο (συμβολή πολλαπλών κυμάτων).

Τα φαινόμενα περίθλασης έχουν ταξινομηθεί σε δυο κατηγορίες. Στην **περίθλαση Fraunhofer**, η προσπίπτουσα δέσμη φωτός είναι ένα επίπεδο κύμα (δέσμη παράλληλων ακτίνων φωτός) και η παρατήρηση της απεικόνισης της περίθλασης (ανίχνευση της έντασης του φωτός) πραγματοποιείται πολύ μακριά από το σημείο του εμποδίου (περίθλαση μακρινού πεδίου), έτσι που τα κύματα που φτάνουν εκεί φαίνονται ως επίπεδα κύματα. Στην περίθλαση **Fresnel**, η προσπίπτουσα δέσμη και τα παραγόμενα κύματα δεν είναι επίπεδα κύματα, αλλά παρουσιάζουν μια σημαντική καμπύλωση στο μέτωπο κύματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η πηγή φωτός και το επίπεδο παρατήρησης βρίσκονται πολύ κοντά στο εμπόδιο (περίθλαση κοντινού πεδίου). Από τις δυο κατηγορίες, η πλέον σημαντική είναι η περίθλαση Fraunhofer.

Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται η απεικόνιση περίθλασης μερικών αντικειμένων που βρίσκονται στην πορεία μιας δέσμης παράλληλων ακτίνων φωτός. Για να απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας ας θεωρήσουμε την περίπτωση ( $\gamma$ ) του οπτικού φράγματος. Τα οπτικά φράγματα είναι οπτικές διατάξεις που στην πιο απλή τους μορφή μπορεί να είναι ένα γυάλινο πλακίδιο που φέρει χαραγές περιοδικά διατεταγμένες (**διαπερατό φράγμα**). Αν σε ένα φράγμα αυτής της μορφής προσπέσει μονοχρωματική δέσμη παράλληλων ακτίνων, οι χαραγές του φράγματος ενεργούν σαν αδιαφανείς περιοχές και δεν επιτρέπουν στο φως να περάσει. Αντίθετα, τα διάκενα (διαπερατά τμήματα) μεταξύ δύο χαραγών δρουν σαν σχισμές και επιτρέπουν στο φως να περάσει κατ' ευθείαν χωρίς να παρουσιάσει φαινόμενα περίθλασης. Όμως στις παρυφές των σχισμών το φως υφίσταται σχετική καμπύλωση προς συγκεκριμένες κατευθύνσεις (γωνίες) και σχηματίζει την απεικόνιση περίθλασης.

Το κέντρο της απεικόνισης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2γ, διαμορφώνεται από το φως που περνάει κατ' ευθείαν χωρίς να καμπυλώσει, ενώ το τμήμα που έχει υποστεί



**Σχήμα 2.** Απεικονίσεις περίθλασης: (α) λεπτής σχισμής. (β) οπής. (γ) πολλών σχισμών (οπτικό φράγμα). (δ) λεπτού μεταλλικού πλέγματος. (ε) περιστρέφοντας το οπτικό φράγμα, περιστρέφεται και η απεικόνιση περίθλασης. (ζ) απεικόνιση περίθλασης οπτικού φράγματος που παρουσιάζει διαφορετική σταθερά σε σχέση με αυτό της περίπτωσης (γ).

περίθλαση, δημιουργεί μέγιστα που βρίσκονται σε συγκεκριμένες αποστάσεις από το κεντρικό μέγιστο. Τα μέγιστα αυτά καλούνται τάξεις κροσσών. Ένας φακός θα εστιάσει την απεικόνιση περίθλασης επάνω στην εστία του. Για να είμαστε όμως ακριβείς, αυτό που πραγματικά θα εστιάσει επάνω στην εστία είναι το κεντρικό μέγιστο, λόγω του ότι διαμορφώνεται από δέσμη παράλληλων ακτίνων (παράλληλη προς τον οπτικό άξονα του φακού). Το τμήμα του φωτός που καμπυλώνει (περιθλάται), προσπίπτει στο φακό υπό γωνία και επομένως θα ευρεθεί ακόμη πιο μακριά από το κεντρικό μέγιστο. Κατ' αυτόν, επομένως, τον τρόπο σχηματίζονται τα μέγιστα της περίθλασης στο εστιακό επίπεδο του φακού (επίπεδο Fourier). Υπ' αυτή την έννοια ο φακός “χαρτογραφεί” την ποσότητα του φωτός που προέρχεται από περίθλαση (ταξινομεί δηλαδή το φως σε τάξεις περίθλασης στο εστιακό του επίπεδο). Σε μαθηματικούς όρους, η οπτική πληροφορία ενός αντικειμένου διαχωρίζεται, στο επίπεδο Fourier, σε συχνότητες.

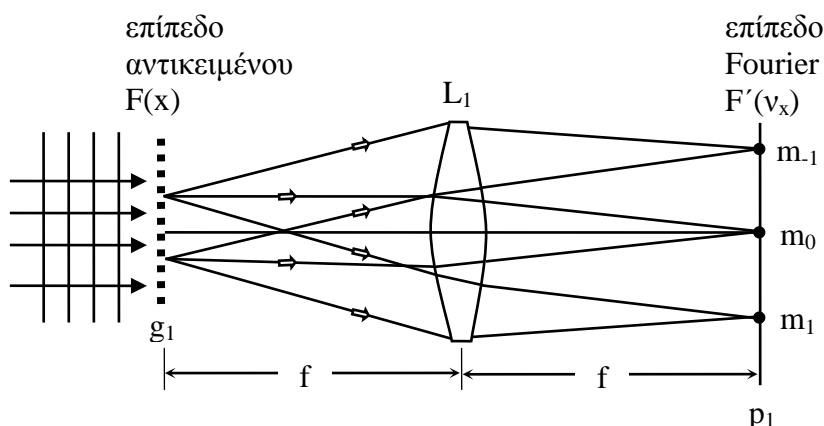
### 2.3 Χωρικές συχνότητες

Σε σχέση με την απεικόνιση περίθλασης που παρατηρούμε στο Σχήμα 2γ, το κεντρικό μέγιστο αποτελεί τον κροσσό μηδενικής τάξης, ενώ τα πρώτα μέγιστα (δεξιά και αριστερά του κεντρικού) καλούνται κροσσοί 1ης τάξης, τα δεύτερα μέγιστα καλούνται κροσσοί δεύτερης τάξης κ.ο.κ. Σε όρους Fourier, οι υψηλές χωρικές συχνότητες αντιστοιχούν σε υψηλές τάξεις κροσσών, που ο σχηματισμός τους απαιτεί υψηλό βαθμό κάμψης του φωτός. Έτσι, για όλα τα αντικείμενα, οι συχνότητες που ευρίσκονται στα άκρα της απεικόνισης περίθλασης δηλαδή στα άκρα της κατανομής της έντασης στο επίπεδο Fourier, αντιστοιχούν σε υψηλότερες χωρικές συχνότητες. Οι χαμηλότερες χωρικές συχνότητες, για τις οποίες δεν απαιτείται μεγάλη κάμψη του φωτός, ευρίσκονται στο μέσο του επιπέδου Fourier. Ο κροσσός μηδενικής τάξης αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα και εκφράζει μια μέση τιμή της έντασης (όρος DC).

## 2.4 Ο φακός ως μετασχηματιστής Fourier

Πρακτικά, η παρατήρηση μιας απεικόνισης περίθλασης μακρινού πεδίου (περίθλαση Fraunhofer) πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός συγκλίνοντα φακού, ο οποίος εστιάζει την απεικόνιση σε συγκεκριμένη κοντινή απόσταση (Σχήμα 3). Το αντικείμενο (σχισμή, οπή, εικόνα σε σλάιντ κ.λπ) τοποθετείται επάνω στο εστιακό επίπεδο του φακού (επίπεδο αντικειμένου).

Για να απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας ας θεωρήσουμε πάλι την περίπτωση ενός οπτικού φράγματος (μονοδιάστατο αντικείμενο) που περιγράφεται από τη συνάρτηση



**Σχήμα 3.** Το είδωλο της απεικόνισης περίθλασης ενός αντικειμένου παρατηρείται στο δεύτερο εστιακό επίπεδο ενός συγκλίνοντα φακού (επίπεδο Fourier), εστιακής απόστασης  $f$ .

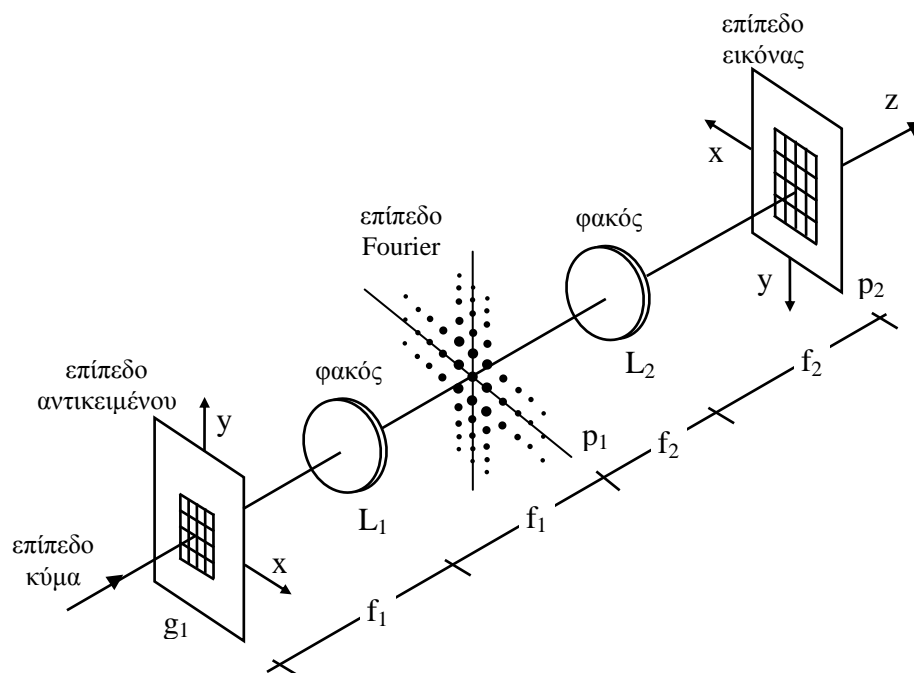
$F(x)$ , στο οποίο προσπίπτει κάθετα δέσμη παράλληλων ακτίνων μονοχρωματικού φωτός. Η περίθλαση μακρινού πεδίου θα σχηματιστεί από όλες τις παράλληλες μεταξύ τους ακτίνες που προέρχονται από όλα τα σημεία των σχισμών. Ένας συγκλίνοντας φακός θα συλλέξει όλες αυτές τις ομάδες των παράλληλων ακτίνων και θα τις εστιάσει στο δεύτερο εστιακό του επίπεδο. Στο Σχήμα 3, για λόγους απλοποίησης των πραγμάτων, παρουσιάζουμε τρεις ομάδες παράλληλων ακτίνων που εστιάζονται κατ' αυτό τον τρόπο. Στην ουσία, αυτό που πραγματοποιήσαμε είναι όχι μόνο να μεταφέρουμε την απεικόνιση μακρινού πεδίου πιο κοντά, αλλά και να την μικρύνουμε. Με άλλα λόγια ο φακός λειτουργεί ως ένας μετασχηματιστής Fourier, λόγω του γεγονότος ότι η απεικόνιση περίθλασης στο επίπεδο  $p_1$  είναι, όπως έχουμε αναφέρει, ο μετασχηματισμός Fourier του αντικειμένου. Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση περίθλασης είναι το φάσμα των χωρικών συχνοτήτων του αντικειμένου, δηλαδή η εικόνα του αντικειμένου που περιγράφεται από τη συνάρτηση  $F(x)$ , μεταφέρθηκε από το χώρο των διαστάσεων στο χώρο των συχνοτήτων. Η απεικόνιση που παρατηρούμε στο επίπεδο Fourier (επίπεδο  $p_1$ ), περιγράφεται από τη συνάρτηση  $F'(v_x)$ .

Για την περίπτωση του απλού μονοδιάστατου οπτικού φράγματος που εξετάζουμε, ο κροσσός μηδενικής τάξης  $m_0$  αποτελεί τον όρο DC και αντιστοιχεί σε μηδενική χωρική συχνότητα. Οι κροσσοί  $m_1$  και  $m_{-1}$  που παρατηρούνται εκατέρωθεν του κεντρικού, αντιστοιχούν στη θεμελιώδη χωρική συχνότητα του αντικειμένου, ενώ οι υπόλοιποι κροσσοί  $m_{\pm 2}$ ,  $m_{\pm 3}$ ,  $m_{\pm 4}$  κ.λπ που παρατηρούνται καθώς απομακρυνόμαστε από τον κεντρικό, αντιστοιχούν στις αρμονικές της θεμελιώδους συχνότητας και διαμορφώνονται σε όλο και υψηλότερες χωρικές συχνότητες.

Σημείωση: στη γενική περίπτωση δισδιάστατου αντικειμένου, όλα τα παραπάνω ισχύουν, όμως η απεικόνιση περίθλασης δεν θα είναι τόσο απλή αλλά θα είναι δισδιάστατη (για παράδειγμα Σχήμα 2δ), διαμορφούμενη από ένα μετασχηματισμό Fourier δυο διαστάσεων.

## 2.5 Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier – Ανασύνθεση εικόνας

Κάθε μετασχηματισμός Fourier έχει και τον αντίστροφό του, ο οποίος επαναφέρει τη μετασχηματισμένη (κατά Fourier) συνάρτηση πίσω στην αρχική της μορφή. Αν, για παράδειγμα  $F'(v_x, v_y) = \Phi[F(x, y)]$ , τότε  $F(x, y) = \Phi^{-1}[F'(v_x, v_y)]$ , όπου  $\Phi[F(x, y)]$  ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $F(x, y)$  και  $\Phi^{-1}[F'(v_x, v_y)]$  ο αντίστροφός του.



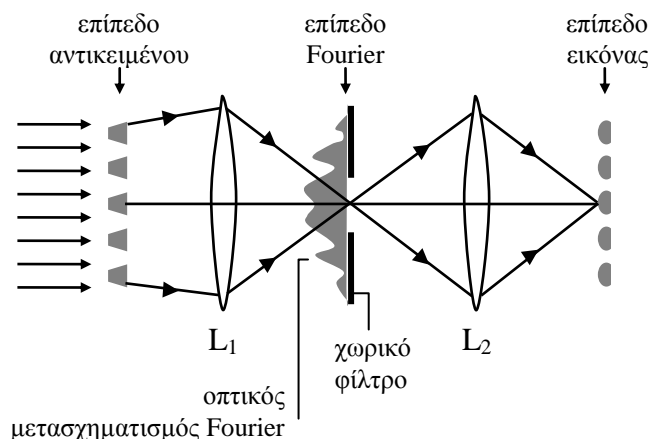
**Σχήμα 4.** Αναλογική επεξεργασία οπτικού σήματος - Διάταξη 4f.  
Αυτή η διάταξη συμπληρώνει τη διάταξη του Σχήματος 3.

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται ένα οπτικό σύστημα (διάταξη 4f) που πραγματοποιεί και τις δυο αυτές εργασίες: δηλαδή μετασχηματίζει τη συνάρτηση κατά Fourier στο επίπεδο  $p_1$  και κατόπιν την ανασυνθέτει στο επίπεδο  $p_2$  με τη βοήθεια του φακού  $L_2$ . Αυτό μας δίνει πρακτικά τη δυνατότητα να επέμβουμε στο επίπεδο Fourier ( $p_1$ ) και να μεταβάλλουμε το φάσμα συχνοτήτων της εικόνας που έχουμε στο επίπεδο  $g_1$ , αλλάζοντας τελικά συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της.

## 2.6 Φιλτράρισμα χωρικών συχνοτήτων – Επεξεργασία εικόνας

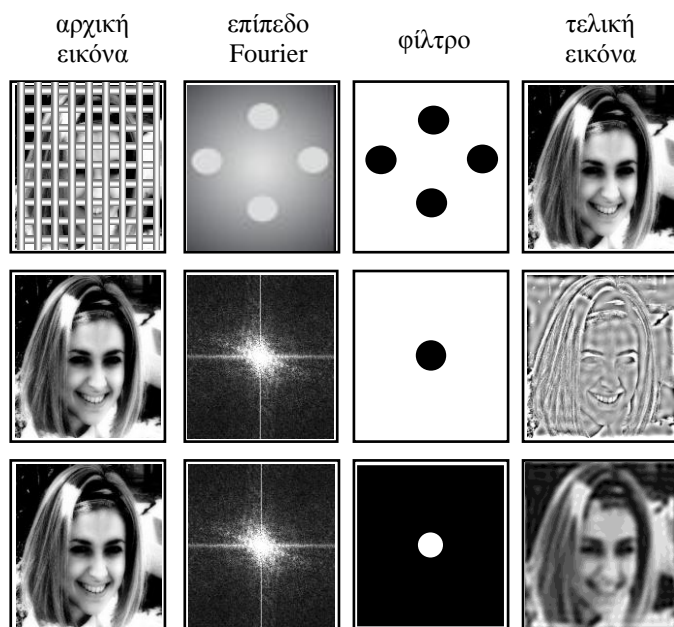
Μια πολύ σημαντική εφαρμογή των οπτικών μετασχηματισμών Fourier βρίσκεται στη διαδικασία επεξεργασίας και βελτίωσης εικόνων. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει δυο στάδια: κατά το πρώτο στάδιο το φάσμα των χωρικών συχνοτήτων του αρχικού οπτικού σήματος/εικόνας τροποποιείται με τη βοήθεια φίλτρων στο επίπεδο μετασχηματισμού Fourier, ενώ κατά το δεύτερο στάδιο, με τη χρήση ενός ακόμη φακού, πραγματοποιείται ένας δεύτερος μετασχηματισμός Fourier που ανασυνθέτει την αρχική εικόνα στο πίσω εστιακό του επίπεδο, η οποία όμως θα

παρουσιαστεί αλλαγμένη λόγω των μεταβολών που έχει υποστεί το φάσμα των χωρικών συχνοτήτων της.



**Σχήμα 5.** Αναλογική επεξεργασία οπτικού σήματος. Το σήμα φιλτράρεται στο επίπεδο συχνοτήτων από φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων.

Στο Σχήμα 5 παρουσιάζεται μια πιθανή διάταξη για την οπτική επεξεργασία μιας εικόνας τοποθετημένης στο επίπεδο του αντικειμένου. Παρατηρείστε στο επίπεδο Fourier την ύπαρξη ενός χωρικού φίλτρου (ένα αδιαφανές σλάιντ που φέρει μια οπή στο κέντρο του), το οποίο μπλοκάρει τις υψηλές συχνότητες και επιτρέπει τη διέλευση μόνο των χαμηλών συχνοτήτων. Σ' αυτή την περίπτωση η εικόνα που θα προκύψει από το δεύτερο μετασχηματισμό Fourier θα αποτελείται από μια σύνθεση χαμηλών συχνοτήτων, με αποτέλεσμα οι αιχμηρές γωνίες που παρατηρούνται στην



(α). Η εικόνα φιλτράρεται από μάσκα που φέρει αδιαφανείς κηλίδες, ακριβώς εκεί που ευρίσκονται οι περιφερειακοί κροσσοί.

(β). Η εικόνα φιλτράρεται από φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων – όξυνση των άκρων.

(γ). Η εικόνα φιλτράρεται από φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων – θόλωμα των άκρων.

**Σχήμα 6.** Φιλτράρισμα χωρικών συχνοτήτων

αρχική να παρουσιάζονται στρογγυλεμένες. Με άλλα λόγια, δημιουργήσαμε μια νέα εικόνα μικρότερης οξύτητας από την αρχική.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη χρήση χωρικών φίλτρων στη διαδικασία της οπτικής επεξεργασίας εικόνας, πραγματοποιήσαμε ψηφιακή προσομοίωση μερικών μοντέλων την οποία παραθέτουμε στο Σχήμα 6.



Παρατηρείστε στο σχήμα την εικόνα (α). Ο μετασχηματισμός της θα παρουσιάσει μια εικόνα που διαμορφώνεται από μια ασαφή φωτεινή κυκλική περιοχή (που περιέχει σχεδόν το σύνολο των πληροφοριών της εικόνας) και περιφερειακά από τέσσερις φωτεινούς κροσσούς, οι οποίοι δημιουργούνται λόγω του πλέγματος. Οι δυο κροσσοί στον κατακόρυφο άξονα δημιουργούνται από τις οριζόντιες ραβδώσεις του πλέγματος, ενώ οι άλλοι δυο στον οριζόντιο άξονα δημιουργούνται από τις κατακόρυφες ραβδώσεις. Αν στο επίπεδο Fourier τοποθετήσουμε ένα διαφανές φίλτρο (μάσκα) που φέρει τέσσερις αδιαφανείς κηλίδες, τοποθετημένες κατά τρόπο που να μπλοκάρουν τους φωτεινούς κροσσούς (δηλαδή μπλοκάρουμε το φάσμα συχνοτήτων του πλέγματος), τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier θα ανασυνθέσει την αρχική εικόνα, χωρίς όμως τις πληροφορίες που προέρχονται από το πλέγμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αφαίρεση του πλέγματος στην τελική εικόνα. Στις επόμενες δυο περιπτώσεις (β) και (γ) χρησιμοποιήσαμε φίλτρα διέλευσης υψηλών και χαμηλών συχνοτήτων αντίστοιχα.

#### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

E. Hecht, *Optics* (Addison Wesley, 1990)

G. Fowles, *Introduction to Modern Optics* (Dover, 1975)

Steward, E. G. *Fourier Optics: an Introduction* (New York: Ellis Harwood Limited, 1983)

Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, 1996 2nd edition)

A. Ανδριτσάκη – Γ. Μήτσου – Δ. Μελιτσιώτη, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Οπτικής – Οπτοηλεκτρονικής & Laser με Στοιχεία Θεωρίας* (Τόμος I, Εκδόσεις Λύχνος 2005)

## B. Πείραμα

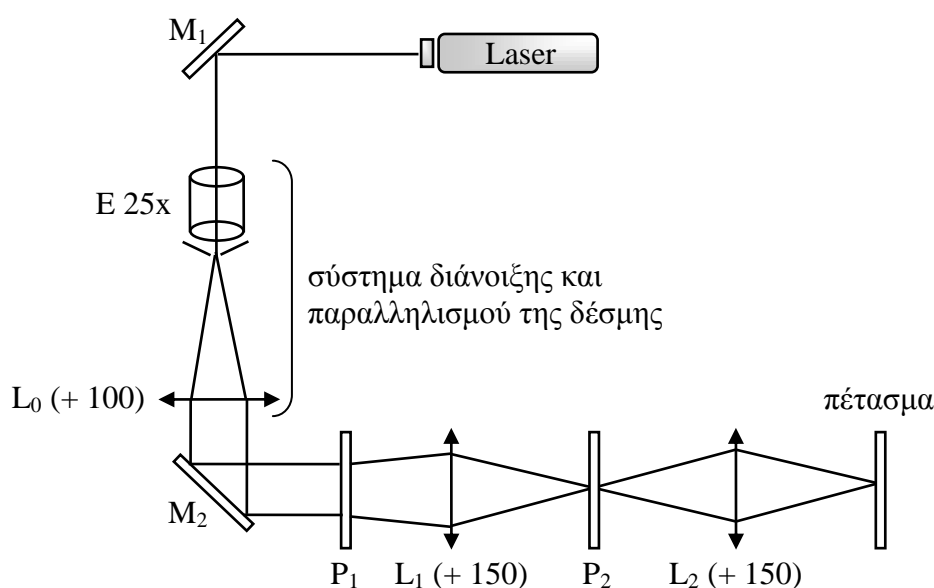
### 1. Σκοπός

Η οπτική Fourier είναι ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία στην ανάλυση των χωρικών συχνοτήτων εικόνων. Μια ιδιότητα που κάνει την οπτική ένα εντυπωσιακό εργαλείο σε τέτοιου είδους ανάλυση είναι ότι, κατά την ελεύθερη διάδοση του φωτός στον αέρα, μπορούμε να δούμε σε πραγματικό χρόνο την επίδραση που έχουν οι φακοί και τα διάφορα οπτικά φίλτρα σε μια δέσμη φωτός, καθώς αυτή διαδίδεται δια μέσου του συστήματος.

Στο πείραμα αυτό θα διαμορφώσουμε ένα σύστημα φακών που θα μας επιτρέψει την απεικόνιση του φάσματος Fourier διαφόρων αντικειμένων μιας και δυο διαστάσεων και θα χρησιμοποιήσουμε μια σειρά από οπτικά φίλτρα για την τροποποίηση αυτού του φάσματος. Θα φιλτράρουμε δηλαδή επιλεκτικά το φάσμα των χωρικών συχνοτήτων της αρχικής μας εικόνας, μεταβάλλοντας έτσι τα χαρακτηριστικά της.

### 2. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη που είναι τοποθετημένη επάνω σε μια μεταλλική οπτική βάση (Σχήμα 7), αποτελείται από τα εξής τμήματα:



**Σχήμα 7.** Τυπική διάταξη μελέτης βασικών αρχών της οπτικής Fourier σε διάταξη 4f.

- Ένα laser He-Ne/1mW, 632.8 nm
- Σύστημα διάνοιξης και παραλληλισμού της δέσμης του Laser
- Δυο κάτοπτρα 30x30 mm
- Αντικειμενικός φακός 20x, N.A 0.45
- Ένα διάφραγμα οπής διαμέτρου 30  $\mu\text{m}$
- Δυο φακούς +150 mm
- Αντικείμενα όπως:
  1. μια σειρά οπτικών φραγμάτων διαφόρων σταθερών
  2. ένα διάφραγμα ίριδας μεταβλητής διαμέτρου
  3. μια σειρά διαφραγμάτων
  4. διάφορες εικόνες σε σλάϊντ
  5. βάσεις τοποθέτησης των σλάϊντς (αντικείμενα – φίλτρα)

- Πέτασμα
- Διάφορα βοηθητικά εξαρτήματα

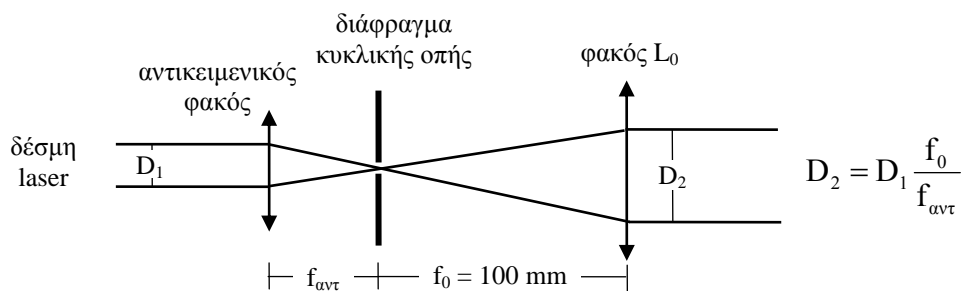
### 3. Πειραματική διαδικασία

#### 3.1 Ευθυγράμμιση διάταξης

Για να εκτελέσουμε σωστά το πείραμα θα πρέπει πρώτα να ευθυγραμμίσουμε τη δέσμη του laser κατά μήκος της οπτικής τράπεζας. Προς τούτο τοποθετούμε στην οπτική τράπεζα το laser και τα δυο κάτοπτρα  $M_1$  και  $M_2$ , όπως εμφανίζονται στο Σχήμα 7. Θέτουμε σε λειτουργία το laser και ρυθμίζουμε την πορεία της δέσμης από τους κοχλίες που βρίσκονται στο πίσω τμήμα των κατόπτρων, έτσι που αυτή να οδηγείται παράλληλα κατά μήκος της οπτικής τράπεζας (μετράμε με ένα χάρακα σε διάφορα σημεία, κατά μήκος της δέσμης, την απόστασή της από την οπτική τράπεζα).

Στη συνέχεια τοποθετούμε το σύστημα διάνοιξης της δέσμης E25x, αφού αφαιρέσουμε από αυτό τον αντικειμενικό φακό 20x και το διάφραγμα οπής διαμέτρου 30  $\mu\text{m}$ . Κατά την τοποθέτησή του, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η δέσμη διέρχεται από το κυκλικό διάφραγμα χωρίς να συναντά εμπόδια. Κατόπιν αυτού αφαιρούμε από το σύστημα το διάφραγμα και τοποθετούμε τον αντικειμενικό φακό 20x και το διάφραγμα κυκλικής οπής διαμέτρου 30  $\mu\text{m}$ . Μετακινούμε το διάφραγμα της κυκλικής οπής προς την εστία του αντικειμενικού φακού, μέχρι να παρατηρήσουμε ένα καθαρό σποτ επάνω σε ένα κομμάτι χαρτιού το οποίο τοποθετούμε πίσω από το διάφραγμα και ρυθμίζουμε πλευρικά τις θέσεις του φακού και του διαφράγματος, έτσι ώστε να μην παρατηρούμε φαινόμενα περίθλασης (δηλαδή στο ίχνος της δέσμης να παρατηρείται μια ομαλή κατανομή της έντασης).

Τοποθετούμε στην πορεία της δέσμης το φακό  $L_0$  ( $f = +100 \text{ mm}$ ) και σε απόσταση 100 mm από το διάφραγμα της κυκλικής οπής, έτσι που η δέσμη να εξέρχεται από το



**Σχήμα 8.** Σύστημα διάνοιξης και παραλληλισμού της δέσμης του laser.  $D_1$  και  $D_2$  είναι οι διάμετροι της δέσμης του laser πριν και μετά τη διάνοιξη και τον παραλληλισμό της αντίστοιχα.

φακό ως δέσμη παράλληλων ακτίνων (τσεκάρουμε τον παραλληλισμό της δέσμης μετρώντας με ένα χάρακα τη διάμετρό της σε διάφορες αποστάσεις από το φακό). Στο Σχήμα 8 παρουσιάζουμε ένα συνοπτικό διάγραμμα του συστήματος διάνοιξης και παραλληλισμού της δέσμης του laser.

Τοποθετούμε στην οπτική τράπεζα και τα υπόλοιπα στοιχεία της διάταξης, δηλαδή τη βάση στήριξης  $P_1$  των αντικειμένων, το φακό  $L_1$ , τη βάση στήριξης  $P_2$  των φίλτρων, το φακό  $L_2$  και το πέτασμα. Σημείωση: οι θέσεις που θα τοποθετηθούν αυτά τα αντικείμενα αναφέρονται στις επόμενες παραγράφους.

### 3.2 Οπτικοί μετασχηματισμοί Fourier (διάταξη 2f)

Όπως προαναφέραμε, όταν μια δέσμη παράλληλων ακτίνων φωτός περιθλάται και στη συνέχεια διέρχεται από συγκλίνοντα φακό, ο φακός εκτελεί οπτικά ένα μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή η απεικόνιση περίθλασης στο εστιακό επίπεδο του φακού είναι ο μετασχηματισμός Fourier του προσπίπτοντος μετώπου κύματος.

Σ' αυτή την ενότητα του πειράματος θα μετατρέψουμε τη διάταξη του Σχήματος 7 σε διάταξη 2f, δηλαδή θα αφαιρέσουμε το φακό  $L_2$  από την οπτική τράπεζα και θα μεταφέρουμε το πέτασμα στη θέση  $P_2$  (αφού αφαιρέσουμε επίσης τη βάση τοποθέτησης των φίλτρων).

Σημείωση: η βάση τοποθέτησης αντικειμένων  $P_1$  και το πέτασμα ευρίσκονται εκατέρωθεν του φακού  $L_1$  σε απόσταση  $1f_1$  ( $f_1 = 150 \text{ cm}$ ) από το φακό.

Χρησιμοποιώντας, στη συνέχεια, διάφορα αντικείμενα (όπως για παράδειγμα οπτικά φράγματα διαφόρων σταθερών, μεταλλικά πλέγματα, οπές, σχισμές κ.λπ) τα οποία είναι δομημένα επάνω σε σλαϊντς θα παρατηρήσουμε και καταγράψουμε τις απεικονίσεις περίθλασης στο επίπεδο Fourier. Τέλος, ειδικά για την περίπτωση των οπτικών φραγμάτων, θα υπολογίσουμε την απόσταση κάθε φωτεινού κροσσού από τον οπτικό άξονα του φακού. Προς τούτο θα εργαστούμε ως εξής: δεδομένης της σταθεράς  $d$  του οπτικού φράγματος (δηλαδή της απόστασης μεταξύ δυο διαδοχικών γραμμών), οι κροσσοί συμβολής θα παρατηρηθούν για συγκεκριμένες γωνίες που ικανοποιούν τη σχέση

$$m\lambda = d \sin \theta \quad \text{όπου } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2)$$

Στο επίπεδο Fourier αυτά τα μέγιστα θα παρατηρηθούν σε αποστάσεις  $\approx 2f_1 \tan \theta$  από τον οπτικό άξονα του φακού, δηλαδή

$$y_m \cong 2f_1 \tan \theta \quad (3)$$

όπου  $y_m$  η απόσταση κάθε κροσσού από τον οπτικό άξονα και  $f_1$  η εστιακή απόσταση του φακού  $L_1$ .

Από τη σχέση (2) θα προσδιορίσουμε, για κάθε κροσσό, τη γωνία στην οποία σχηματίζεται και από τη σχέση (3) θα υπολογίσουμε την απόσταση  $y_m$ .

### 3.3 Ανασύνθεση και επεξεργασία εικόνας – Φιλτράρισμα χωρικών συχνοτήτων (διάταξη 4f)

Σ' αυτό το τμήμα του πειράματος θα δημιουργήσουμε ένα σύστημα επεξεργασίας οπτικού σήματος (διάταξη 4f). Θα απεικονίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος εισόδου, χρησιμοποιώντας το φακό  $L_1$ , θα φιλτράρουμε το μετασχηματισμό τοποθετώντας διάφορα φίλτρα στο επίπεδο Fourier και θα ανασυνθέσουμε το σήμα πραγματοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier με τη χρήση του φακού  $L_2$ . Μια τυπική διάταξη ενός τέτοιου συστήματος, παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.

Εδώ να υπενθυμίσουμε ότι οι υψηλές χωρικές συχνότητες διαμορφώνουν τις γρήγορες και διακριτές μεταβολές της έντασης ενός σήματος: λεπτομέρειες, θόρυβος, παρυφές (άκρα) κ.λπ, ενώ οι χαμηλές συχνότητες ευθύνονται για τις σταδιακές και ομαλές μεταβολές της έντασης: γενική εικόνα της κατανομής της έντασης, ευρείς περιοχές όπου παρατηρείται ομαλή μεταβολή της κ.λπ.

Για την πραγματοποίηση της διάταξης  $4f$  θα αφαιρέσουμε το πέτασμα από τη θέση  $P_2$  και στη θέση του θα τοποθετήσουμε τη βάση τοποθέτησης των φίλτρων. Στη συνέχεια θα τοποθετήσουμε το φακό  $L_2$  σε απόσταση  $f_2$  από τη βάση τοποθέτησης των φίλτρων. Τέλος θα τοποθετήσουμε το πέτασμα σε απόσταση  $f_2$  από το φακό.

#### 4. Εργασίες

##### 4.1 Διάταξη $2f$

##### 4.2 Διάταξη $4f$

1. Ευθυγραμμίζουμε τη δέσμη του laser σύμφωνα με τις οδηγίες της παραγράφου 2.1 και διαμορφώνουμε το σύστημα σε διάταξη  $2f$  (δηλαδή μέχρι το σημείο που παρατηρούμε την απεικόνιση περίθλασης). Κατόπιν τοποθετούμε το φακό  $L_2$  για να πραγματοποιήσουμε το δεύτερο μετασχηματισμό Fourier.
2. Στη θέση  $P_2$  (επίπεδο Fourier που δημιουργεί ο φακός  $L_1$ ) τοποθετούμε το σλάιντ που φέρει διάφραγμα με κυκλική οπή. Το διάφραγμα αυτό θα μας βοηθήσει να βρούμε ακριβώς τη θέση του φακού  $L_2$ .
3. Τοποθετούμε το φακό  $L_2$  σε απόσταση  $f_2$  από το διάφραγμα και ένα κάτοπτρο πίσω από το φακό, σε απόσταση  $f_2$  επίσης. Παρατηρούμε το είδωλο της κυκλικής οπής στην πίσω πλευρά του διαφράγματος, ενώ ταυτόχρονα μετακινούμε τον φακό εμπρός – πίσω, κατά μήκος της οπτικής τράπεζας. Η ακριβής θέση του φακού θα είναι στο σημείο που το είδωλο της οπής θα είναι το πιο μικρό. Αφαιρούμε το σλάιντ, χωρίς να αφαιρέσουμε τη βάση στήριξης.
4. Τοποθετούμε στη βάση στήριξης  $P_1$  διάφορα αντικείμενα και παρατηρούμε/καταγράφουμε την εικόνα τους στο πέτασμα το οποίο τοποθετούμε στη θέση του κατόπτρου.